KALKÜLÜS 1

Editör
Süleyman ÖĞREKÇİ

© Copyright 2026

Bu kitabın, basım, yayın ve satış hakları Akademisyen Kitabevi A.Ş.'ne aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kağıt ve/veya başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz, dağıtılamaz. Tablo, şekil ve grafikler izin alınmadan, ticari amaçlı kullanılamaz. Bu kitap T.C. Kültür Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır.

ISBN
978-625-362-044-8

Kitap Adı
Kalkülüs 1

Editör
Süleyman ÖĞREKÇİ
ORCID iD: 0000-0003-1205-6848

Yayın Koordinatörü
Yasin DİLMEN

Sayfa ve Kapak Tasarımı
Akademisyen Dizgi Ünitesi

Yayıncı Sertifika No
47518

Bisac Code
EDU029010

DOI
10.37609/akya.4172

Kütüphane Kimlik Kartı
Kalkülüs 1 / ed. Süleyman Öğrekçi.
Ankara : Akademisyen Yayınevi Kitabevi, 2026.
304 s. : şekil, tablo, grafik. ; 160x235 mm.
Kaynakça var.
ISBN 9786253620448

GENEL DAĞITIM

Akademisyen Kitabevi A.Ş.

Halk Sokak 5 / A
Yenişehir / Ankara
Tel: 0312 431 16 33
siparis@akademisyen.com

www.akademisyen.com

İÇİNDEKİLER

YAZARLAR

Prof. Dr. Ali AKGÜL
Siirt Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Uygulamalı Matematik AD

Doç. Dr. Mehmet Tarık ATAY
Bağımsız Araştırmacı

Dr. Öğr. Üyesi Begüm ÇIĞŞAR
Adana Alparslan Türkeş Bilim ve Teknoloji Üniversitesi, Bilgisayar ve Bilişim Fakültesi, Veri Bilimi ve Analitiği AD

Dr. Öğr. Üyesi Sadık EYİDOĞAN
Çukurova Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi AD

Prof. Dr. Mehmet GÜMÜŞ
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematiğin Temelleri ve Matematik Lojik AD

Doç. Dr. Cem KOŞAR
Gaziantep Üniversitesi, Nizip Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi AD

Doç. Dr. Nida Palamut KOŞAR
Gaziantep Üniversitesi, Nizip Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi AD

Prof. Dr. Mehmet MERDAN
Gümüşhane Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Uygulamalı Matematik AD

Bölüm 1

TEMEL GİRİŞ BİLGİLERİ VE FONKSİYONLAR

Mehmet Tarık ATAY[1]

1.GİRİŞ

1.1.Kümeler

Matematik alanında en temel konu ve alan olarak "Küme" tanımını, kuralları ve uygulamaları denebilir.

En basit anlamda "Küme" kavramını açıklamak istersek, bu kavramı belli ayrıştırılabilir, ölçülebilir, özellikleri ortak olarak paylaşan nesnelerin topluluğu" olarak tanımlanabilir. Dolayısıyla küme, bu ortak özelliklere sahip nesnelerin ortak "Listesi", "Topluluğu" olarak düşünülebilir.

Örneğin, belli bir sokaktaki 3 katlı apartmanlar ya da belli bir oyuncak kutusundaki mavi renkli bilyeler gibi.

Tanım: Tanımlanmış bir kümenin içindeki ve bu kümeyi oluşturan nesnelerin her birine kümenin "elemanı" denir.

Not: Kural olarak, kümeler isimlendirilirken büyük harf kullanılır. A, B, C, X, Y gibi harfler kullanılır. Diğer taraftan kümenin "elemanları" ise, küçük harfle ifade eder, yani a, b, c, x, y … gibi.

Not: Matematikte "$\in$" işareti "elemanı olmak", "içinde olmak", "dahil olmak" anlamlarını taşır. Yani, bir x elemanı verilen bir A kümesine ait ise, "$x \in A$" olarak belirtilir, diğer yandan ait değil ise "$x \notin A$" olarak belirtilir.

Not: Bir A kümesini, matematiksel olarak ifade etmek istersek, kümenin elemanlarının genel adını, hangi kurallara göre seçilip kümeye dahil olduğunu açık yazılmış bir şart olarak belirtip, "{…}" olarak parantez içine alırız. Örneğin;

A = {x: x elemanı K koşullarını sağlar}

yani

A = {x: x, K şartı} olarak kısaca yazılabilir.

Not: a) Kümenin elemanlarını sonlu sayıda ise, kümeye "Sonlu Küme" denir.

[1] Doç. Dr., Bağımsız Araştırmacı, mehmettarik.atay@agu.edu.tr, ORCID iD: 0000-0002-7326-5750

DOI: 10.37609/akya.4172.c8091

Kaynakça

1. Aliprantis CD. ve Burkinshaw, O. *Principles of Real Analysis*. 2nd ed. New York: Academic Press; 1990.
2. Anar İE. Genel Matematik 1. 3. Baskı. Ankara: Gazi Kitabevi; 2019.
3. Apostol TM. *Mathematical Analysis*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons Publishing Company;1967.
4. Argün Z. ve Uyar A. *Tek Değişkenli Analiz*. Ankara: Gazi Kitabevi; 2015.
5. Arıkan H. ve Tezergil SE. *Matematik I*. İstanbul : Türkmen Kitabevi, 2014.
6. Balcı M. *Matematik Analiz I*. Ankara: Balcı Yayınları; 1999.
7. Çevik S. ve Bozacı E. *Genel Matematik-1*. 5. Baskı. Ankara: Nobel Yayıncılık; 2012.
8. Dernek A. *Genel Matematik*. 6. Baskı. Ankara: Nobel Yayınevi; 2017.
9. Lange S. *Undergraduate Analysis.* 2nd ed. New York; Springer Publishing; 1996.
10. Sabuncuoğlu A. *Çözümlü Genel Matematik Cilt-1*. Ankara: Nobel Yayınevi; 2017.
11. Sevüktekin M. ve Başkaya Z. *Matematiksel Analiz*. 2. Baskı. Bursa: Dora Yayınları; 2012.

Bölüm 2

LİMİT

Mehmet MERDAN[1]

2.1. LİMİT

Hesaplamanın (analizin) temel yapı taşlarından biri limit kavramıdır. Türevler ve integraller gibi merkezi kavramlar doğrudan limitler üzerine kuruludur. Bir fonksiyonun belirli bir noktaya yaklaşırken nasıl davrandığını anlamak, matematiksel modelleme, fizik, mühendislik ve ekonomi de dahil olmak üzere birçok alanda kritik öneme sahiptir.

Günlük hayatta, "yaklaşma" fikri oldukça sezgiseldir: her adımda hedefe biraz daha yaklaşmak, ancak asla tam olarak ulaşamamak. Matematikte, limit kavramı bu yaklaşma fikrini kesin ve tutarlı bir şekilde ifade etmeyi amaçlar.

Bu bölümde, limit kavramı aşağıdakiler de dahil olmak üzere ayrıntılı olarak ele alınacaktır:

sezgisel ve biçimsel tanımı, temel özellikleri, geometrik yorumu ve çok sayıda çözümlü örnek ve uygulama.

Limit, bir fonksiyonun bir noktadaki değerinden ziyade, o noktaya yaklaştıkça aldığı değerle ilgilenir.

- Sezgisel Tanım: x değişkeni a sayısına yaklaştığında $f(x)$ değerleri bir L sayısına istenildiği kadar yaklaşıyorsa, $f(x)$'in a noktasındaki limiti L'dir denir.

[1] Prof. Dr., Gümüşhane Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Uygulamalı Matematik AD, mmerdan@gumushane.edu.tr, ORCID iD: 0000-0002-8509-3044

DOI: 10.37609/akya.4172.c8092

24. $h(x) = \frac{x^2-4}{x^2+ax+9}$ fonksiyonunun yalnızca bir tane sonsuz süreksizlik noktasına (düşey asimptota) sahip olması için a'nın alabileceği pozitif değer kaçtır?

KAYNAKÇA

1. **Thomas' Calculus (Cilt 1)** – *George B. Thomas Jr., Maurice D. Weir, Joel Hass (Çeviri: Recep Korkmaz)*
2. **Matematik Cilt 1: Calculus** – *Dennis G. Zill, Warren S. Wright*
3. **Calculus: Early Transcendentals** – *James Stewart*
4. **Calculus: A Complete Course** – *Robert A. Adams, Christopher Essex*
5. **Calculus, Vol. 1: One-Variable Calculus** – *Tom M. Apostol*
6. **University Calculus** – *Joel Hass, Maurice D. Weir, George B. Thomas Jr.*

Bölüm 3

SÜREKLİLİK

Mehmet GÜMÜŞ[1]

1.1. Giriş

Fonksiyonların davranışını anlamada en temel matematiksel kavramlardan biri **süreklilik** kavramıdır. Günlük hayatta da birçok olgu sürekli değişim gösterir. Örneğin, bir cismin zamana bağlı konumu, gün boyunca değişen sıcaklık ya da bir aracın hızındaki değişim çoğu zaman ani sıçramalar içermez; bu tür değişimler genellikle **yumuşak ve kesintisiz** bir biçimde gerçekleşir.

Matematiksel olarak bu tür davranışları incelemek için *fonksiyonlar* kullanılır. Bir fonksiyonun grafiğine bakıldığında çoğu zaman şu sezgisel düşünceyi kullanırız:

"Eğer bir fonksiyonun grafiği kalemi kâğıttan kaldırmadan çizilebiliyorsa, o fonksiyon sürekli gibi görünür."

Bu düşünce sürekliliğin iyi bir görsel sezgisini verir; ancak kesin bir şey vardır ki matematikte bu tür sezgisel açıklamalar yeterli değildir. Çünkü bazı fonksiyonlar grafiğe bakıldığında sürekli gibi görünse bile belirli noktalarda beklenmedik davranışlar gösterebilir.

Ayrıca her fonksiyon için grafiği çizmek her zaman mümkün değildir. Bazı fonksiyonların grafikleri son derece karmaşık olabilir; hatta bazı durumlarda fonksiyonun grafiğini açık bir şekilde elde etmek pratik olarak imkânsızdır. Bu nedenle yalnızca geometrik sezgiye dayanmak matematiksel olarak güvenilir bir yöntem değildir.

İşte bu noktada **analiz (calculus)** devreye girer. Analiz, fonksiyonların davranışını yalnızca grafiklere bakarak değil, **limit kavramı ve kesin matematiksel tanımlar** aracılığıyla incelememizi sağlar. Böylece grafiğini kolayca çizemediğimiz fonksiyonlar için bile onların belirli noktalardaki davranışlarını kesin olarak analiz edebiliriz.

[1] Prof. Dr., Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematiğin Temelleri ve Matematik Lojik AD, m.gumus@beun.edu.tr, ORCID iD: 0000-0002-7447-479X

DOI: 10.37609/akya.4172.c8093

Bölüm 4

TÜREV

Cem KOŞAR[1]

Matematiğin seyrini değiştiren kavramlar çok az ve nadirdir. Bu açıdan bakıldığında, türev böyle bir kavramdır. Türevin ortaya çıkmasına sebep olan iki temel klasik problem vardır. Bunlar;

i. Düzlemde bir eğrinin bir noktasındaki teğetinin belirlenmesine ilişkin geometrik problem,

ii. Bir parçacığın, bir aracın veya bir gezegenin hızını veya süratini belirlemeye ilişkin fiziksel problemdir.

$\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in X$ olsun. Bu durumda $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ açık aralığı X kümesinin bir alt kümesi olacak şekilde en az bir δ pozitif reel sayısı mevcut olduğunda x_0 noktasına X kümesinin bir "***iç noktası***" denir. Ayrıca X'in tüm iç noktaların kümesi $X°$ veya int(X) ile gösterilir.

Tanım 4.1 : (Türevin Tanımı)

$\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R},\ f: X \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon ve x_0 reel sayısı X kümesinin bir iç noktası olmak üzere

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{4.1}$$

ifadesinin limit değeri, mevcut bir reel sayı olduğunda bu limite f fonksiyonun x_0 noktasındaki "***türevi*** " denir.

Bu türev değeri $f'(x_0)$ (Lagrange gösterimi) veya $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$ (Leibniz gösterimi) ile gösterilir. Ayrıca f fonksiyonu X kümesinin bütün iç noktalarında türevlenebiliyorsa, $X°$ üzerinde türevli bir fonksiyon olur ve f' ile gösterilir.

Uyarı 4.1 :

- Türevin bir noktada mevcut olması için (4.1) ifadesindeki limit değeri mutlaka bir reel sayı olmalıdır.
- (4.1) limitinde $x - x_0 = h$ dönüşümü yapılırsa:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{4.2}$$

elde edilir.

[1] Doç. Dr., Gaziantep Üniversitesi, Nizip Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi AD, ckosar@gantep.edu.tr, ORCID iD: 0000-0003-4949-4956

DOI: 10.37609/akya.4172.c8094

KAYNAKÇA

1. Smirnov VI. (Translated by Brown D.E.) *A course of higher mathematics Volume I.* Addision-Wesley Publishing Company, Inc. 17th ed. 1964.
2. Bartle RG, Sherbert DR. *Introduction to real analysis.* John Wiley & Sons, Inc. 3rd ed. 2000.
3. Radulescu TL, Radulescu V, Andreescu V. *Problems in real analysis: advanced calculus on the real axis.* Springer.1st ed. 2009.
4. Mahmudov E. *Matematik analiz ve uygulamaları*. Papatya yayıncılık. 1th ed. 2008.
5. Ghorpade SR, Rimaye BV. *A course in calculus and real analysis.* Springer. 1th ed. 2006.

Bölüm 5

TÜREVİN UYGULAMALARI

Nida Palamut KOŞAR[1]

Önceki bölümün büyük bir kısmında türevin nasıl hesaplanacağına odaklanılmıştır. Ancak türevin yalnızca hesaplanması değil, aynı zamanda birçok önemli uygulaması da bulunmaktadır. Bu bölümde ele alınılacak konular ve teoremlerin çoğu; "*fonksiyonların grafikleri ve maksimum-minimum (optimizasyon) problemleri*" hakkında bilgi edinmeye yardımcı olacaktır. Ayrıca türev yardımıyla bazı belirsiz limit problemleri yeniden ele alınacak ve öncekinden farklı bir yöntem ile tekrar hesaplanılacaktır.

Tanım 5.1 : (Yerel Minimum (Maksimum) Noktası ve Değeri)
$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyon ve $c \in [a,b]$ noktası verilsin. Bu durumda $(c-\delta, c+\delta)$ aralığındaki her bir $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq f(c)$ $\big(f(x) \leq f(c)\big)$ olacak şekilde pozitif bir δ sayısı mevcut olduğunda $c \in [a,b]$ sayısına ***yerel minimum*** (***yerel maksimum***) ***noktası*** denir. Ayrıca $f(c)$ sayısı da ***yerel minimum*** (***yerel maksimum***) ***değeri*** olur.

Uyarı 5.1 :

- Tanım 5,1'e göre f fonksiyonun üzerinde, sürekli ya da türevlenebilir olması gibi herhangi bir koşulun olmadığını gözlemleyiniz. f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı olması yeterlidir.
- Eşitsizliği sağlayan x değerlerinin hem $(c-\delta, c+\delta)$ aralığında hem de $[a,b]$ aralığında olması gerektiğine dikkat ediniz.
- Bu tanıma göre yerel minimum (maksimum) noktaları $[a,b]$ aralığın uç noktalarında olabilir. Ayrıca yerel ekstremum değerleri tek olmak zorunda değildir.
- f fonksiyonu $c \in [a,b]$ noktasında ***yerel ekstremuma*** sahip denildiğinde o noktada yerel minimum veya yerel maksimuma sahip olduğu anlaşılacaktır.

[1] Doç. Dr., Gaziantep Üniversitesi, Nizip Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi AD, npkosar@gmail.com, ORCID iD: 0000-0003-2421-7872

DOI: 10.37609/akya.4172.c8095

16. Herhangi α, β reel sayıları için $\alpha < \beta$ olsun. Bu durumda
$$\frac{1}{3}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \theta$$
olacak şekilde bir θ reel sayısının var olduğunu Lagrange'ın Ortalama Değer Teoremi yardımıyla gösteriniz.

KAYNAKÇA

1. Smirnov VI. (Translated by Brown D.E.) *A course of higher mathematics Volume I.* Addision-Wesley Publishing Company, Inc. 17th ed. 1964.
2. Bartle RG, Sherbert DR. *Introduction to real analysis.* John Wiley & Sons, Inc. 3rd ed. 2000.
3. Radulescu TL, Radulescu V, Andreescu V. *Problems in real analysis: advanced calculus on the real axis.* Springer.1st ed. 2009.
4. Mahmudov E. *Matematik analiz ve uygulamaları*. Papatya yayıncılık. 1th ed. 2008.
5. Ghorpade SR, Rimaye BV. *A course in calculus and real analysis.* Springer. 1th ed. 2006.

Bölüm 6

İNTEGRAL

Ali AKGÜL[1]

1 Giriş

1.1 İntegralin Tarihsel Gelişimi

İntegral kavramı, matematik tarihinin en önemli gelişmelerinden biri olarak kabul edilir. Temelinde, doğada ve geometride karşılaşılan alan, hacim ve toplam büyüklüklerin hesaplanması ihtiyacı yatmaktadır. İnsanlar çok eski dönemlerden itibaren düzensiz şekillerin alanını ya da eğrilerle sınırlı bölgelerin büyüklüğünü hesaplamaya çalışmışlardır. Bu çabalar zamanla matematiğin en güçlü araçlarından biri olan integral hesabının ortaya çıkmasına zemin hazırlamıştır. İntegral kavramının gelişimi, antik Yunan döneminden başlayarak orta çağ ve Rönesans boyunca ilerlemiş, 17. yüzyılda Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibniz'in çalışmalarıyla modern matematikteki yerini almıştır.

Antik yunan matematikçileri integral düşüncesinin temellerini atan ilk bilim insanları arasında yer almaktadır. Özellikle Eudoxus ve Archimedes'in geliştirdiği yöntemler, integralin erken biçimleri olarak değerlendirilmektedir. Eudoxus tarafından ortaya atılan tüketme yöntemi, bir geometrik şeklin alanını ya da hacmini daha küçük ve bilinen şekillere bölerek hesaplama fikrine dayanıyordu. Bu yöntem daha sonra Archimedes tarafından geliştirilmiş ve parabolik alanların hesaplanması gibi karmaşık problemlere uygulanmıştır. Archimedes, özellikle parabol segmentinin alanını hesaplama çalışmalarıyla integral kavramının temel mantığını ortaya koymuştur. Onun yaklaşımı, sonsuz sayıda küçük parçanın toplamının bir büyüklüğü oluşturabileceği fikrine dayanıyordu ve bu düşünce modern integral hesabının temelini oluşturmaktadır (Boyer ve Merzbach, 2011).

Orta Çağ boyunca matematiksel gelişmeler yavaşlamış olsa da, islam dünyasında yapılan çalışmalar integral düşüncesinin gelişimine katkı sağlamıştır. Özellikle 11. yüzyılda yaşamış olan matematikçi İbn el-Heysem (Alhazen), bazı geometrik problemlerin çözümünde toplam ve limit fikrini kullanan çalışmalar yapmıştır. Ayrıca bu dönemde yapılan çalışmalar, eğriler altında kalan alanların hesaplanmasına yönelik yeni yaklaşımların ortaya çıkmasına yardımcı olmuştur. Daha sonra Avrupa'da rönesans dönemiyle birlikte bilimsel çalışmalar hız kazanmış ve matematikte yeni yöntemler geliştirilmeye başlanmıştır.

[1] Prof. Dr., Siirt Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Uygulamalı Matematik AD, aliakgul@siirt.edu.tr, ORCID iD: 0000-0001-9832-1424

DOI: 10.37609/akya.4172.c8096

içerisinde integral konusunun kapsamlı bir şekilde öğrenilmesi büyük önem taşımaktadır. Öğrencilerin integral hesap yöntemlerini teorik olarak anlamalarının yanı sıra, bu yöntemleri mühendislik problemlerine uygulayabilme becerisi kazanmaları da mesleki gelişimleri açısından oldukça değerlidir.

Bu bölümde, klasik Riemann integralinden modern ölçü teorisine dayalı Lebesgue integraline geçiş süreci de ele alınmıştır. Ayrıca, limit ve integralin yer değiştirmesi ve integral altında türev alma gibi ileri analiz teknikleri sunulmuştur. Bu araçlar, ileri mühendislik matematiği, kuantum mekaniği ve olasılık teorisindeki problemlerin çözümünde hayati öneme sahiptir.

Kaynaklar

[1] Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). *A History of Mathematics*. John Wiley and Sons.

[2] Struik, D. J. (1987). *A Concise History of Mathematics*. Dover Publications.

[3] Kline, M. (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press.

[4] Apostol, T. M. (1967). *Calculus, Volume 1*. Wiley.

[5] Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2018). *Thomas' Calculus*. Pearson.

[6] Stewart, J. (2016). *Calculus: Early Transcendentals*. Cengage Learning.

[7] Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley.

[8] Marsden, J., & Tromba, A. (2012). *Vector Calculus*. W.H. Freeman.

[9] Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Numerical Analysis*. Brooks/Cole.

[10] Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill Education.

[11] Hibbeler, R. C. (2017). *Engineering Mechanics: Statics*. Pearson.

[12] Oppenheim, A. V, & Willsky, A. S. (1997). *Signals and Systems*. Prentice Hall.

[13] White, F. M. (2016). *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill Education.

[14] Rudin, W. (1987). *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill.

[15] Royden, H. L., & Fitzpatrick, P. (2010). *Real Analysis*. Pearson.

[16] Folland, G. B. (1999). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley.

[17] Feynman, R. P. (1985). *Surely You're Joking, Mr. Feynman!*. W. W. Norton & Company.

Bölüm 7

İNTEGRAL HESAPLAMA TEKNİKLERİ

Begüm ÇIĞŞAR[1]

7.1. Değişken Değiştirme ve Yerine Koyma Teknikleri

7.1.1 Belirsiz İntegralde Değişken Değiştirme ve Yerine Koyma Teknikleri

Bu kısımda temel integral hesaplama tekniklerinden değişken değiştirme ve yerine koyma yöntemlerini ele alacağız. Öncelikle zincir kuralını tekrarlamakta fayda var. Zincir kuralı genel olarak ifade edilmek istenirse;

$f\left(g(x)\right)$ verildiğinde bunun türevini $f'(g(x))(dg/\,dx)$ olarak yazıyorduk Bir örnekle gösterirsek: $(x^2 + 1)^2$ fonksiyonunun türevi $2(x^2 + 1)(2x)$ idi. Eğer $2(x^2+1)(2x)$ ifadesi verilmiş ve bu ifadenin antitürevi yani $(x^2+1)^2$isteniyor olsaydı bu fonksiyonu nasıl elde ederdik?

$\int 4x(x^2 + 1)\,dx$ problemini ele alalım. Verilen problemin integralini bulabilmek için yeni bir u değişken tanımlarız. Örneğimiz üzerinden anlatalım. $u = x^2 + 1$ şeklinde tanımlayalım. Daha sonra u'nun diferansiyelini tanımlayalım: $du = 2x\,dx$. Dikkat edilirse $2x\,dx$ ifadesi, integralini almak istediğimiz fonksiyonda yer almaktadır. Eldeki bu verilerle integrali yeni değişkenle yeniden yazarsak $\int 2u\,du$ integralini elde ederiz. Bu integrali çözersek $u^2 + c$ elde edilecektir. $u = x^2 + 1$ şeklinde tanımlanmıştı. u yerine bu ifadeyi yazarsak $(x^2 + 1)^2 + C$ elde edilir.

[1] Dr. Öğr. Üyesi, Adana Alparslan Türkeş Bilim ve Teknoloji Üniversitesi, Bilgisayar ve Bilişim Fakültesi, Veri Bilimi ve Analitiği AD, bcigsar@atu.edu.tr, ORCID iD: 0000-0002-8453-985X

DOI: 10.37609/akya.4172.c8097

Kaynakça

1) Akdeniz F, Ünlü Y, Dönmez D. *Analize giriş cilt-II.* 3. Baskı. Adana: Nobel Kitabevi; 2006.
2) Stewart J, Kokoska S. (2010). *Calculus: Concepts and contexts*. 4th ed. Toronto: Cengage Learning; 2010.
3) Strang G. *Calculus*. 3rd ed. Wellesley: Cambridge Press; 2005.
4) Thomas GB, Weir MD, Hass JR, Giordano FR. *Thomas' calculus*. 11th ed. Reading: Addison-Wesley; 2005.

Bölüm 8

İNTEGRAL UYGULAMALARI

Sadık EYİDOĞAN[1]

8.1. Parabol Altındaki Alan ve Fermat'ın Yöntemi

Kalkülüsün temelleri atılmadan önce bile, matematikçiler eğrilerin altında kalan alanları hesaplamaya çalışıyorlardı. Antik çağdan beri bu problem, hem geometri hem de sayıların sonsuz küçük değişimlerini anlama isteğinin bir sembolü olmuştur. 17. yüzyıla gelindiğinde Pierre de Fermat (1601–1665), bu konuda dikkat çekici bir yöntem geliştirmiştir. Fermat'ın yöntemi, türev veya integral kavramlarını henüz bilmeden, yalnızca cebirsel düşünme gücüyle eğri altı alanı hesaplamayı başarmıştır.

Fermat, eğrinin altında kalan alanı küçük dikdörtgenlerle yaklaşık olarak bulmayı amaçlamıştır. Ancak onun farkı, bu dikdörtgenleri eşit aralıklarla değil, genişlikleri *geometrik bir dizi* oluşturan şekilde seçmesidir. Böylece alan hesabını, bir geometrik serinin toplamına dönüştürmüştür. Bu yöntem o kadar ileri görüşlüdür ki, modern integral hesabının özünde bulunan *limit kavramını* dolaylı biçimde kullanmaktadır.

Fermat'ın Düşüncesi

Fermat, $y = x^n$ biçimindeki bir eğriyi ele alır ve $x = 0$ ile $x = a$ arasındaki bölgeyi incelemek ister. Bu aralığı, genişlikleri giderek küçülen dikdörtgenlerle böler. Bölme noktaları şu şekilde alınır:

$$x = a, \quad x = ar, \quad x = ar^2, \quad x = ar^3, \quad \dots$$

burada $0 < r < 1$ bir sabittir. Böylece her adımda, dikdörtgenin yüksekliği $y = x^n$ tarafından, genişliği ise ardışık x değerlerinin farkı tarafından belirlenir.

[1] Dr. Öğr. Üyesi, Çukurova Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi AD, seyidogan@cu.edu.tr, ORCID iD: 0000-0003-4324-9845

DOI: 10.37609/akya.4172.c8098

Kaynaklar

[1] Boyer CB, Merzbach UC. *A History of Mathematics*. 2nd ed. New York: Wiley & Sons; 1989.

[2] Demichel Y. Who Invented von Koch's Snowflake Curve? *The American Mathematical Monthly*. 2024;131(8): 662–668. doi:10.1080/00029890.2024.2363737

[3] Rudin W. *Principles of Mathematical Analysis*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill; 1976.

[4] Stewart J. *Calculus*. 2nd ed. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing Company; 1991.