

BÖLÜM 7

UÇ NOKTALARDA LİMİT, SÜREKLİLİK VE TÜREV İLİŞKİSİNE KAVRAMSAL BİR BAKIŞ

Murat DURAN¹

Sonsuz küçük değişimlerin anlamlandırılmasını sağlayan limit kavramı matematiğin temel yapı taşlarından biridir. Türev ve integral gibi ileri düzey kavramların tanımlanmasında ve anlaşılmasında limitin merkezi bir rol oynadığı bilinmektedir (İstanbul Temel Bilimler Akademisi [İSTEMBİL], 2015a). Limit, bir fonksiyonun belirli bir noktaya yaklaşan değerler karşısında nasıl davrandığını ve bu noktada hangi değere yakınsadığını belirlemeye yarayan temel bir analiz aracıdır. Bu yönüyle limit hem sonlu hem de sonsuz değerler bağlamında matematiksel düşünmenin kuramsal temelini oluşturur. Nokta ve sonsuzluk gibi soyut kavramlar limit olmadan yalnızca sezgisel düzeyde kavranabilir. Oysa limit bu kavramlara analitik bir kesinlik kazandırır.

Limit kavramının günlük yaşamdaki karşılıkları da oldukça yaygındır. Sürekli bileşik faiz hesaplamaları, ilaçların yarı ömürlerine göre doz ayarlamaları, anketlerdeki hata paylarının belirlenmesi gibi birçok uygulama limit kavramının doğrudan kullanımına örnek teşkil eder (İSTEMBİL, 2015a). Bu bağlamda limit teorik bir araç olduğu gibi gerçek yaşam problemlerinin çözümünde de kullanılan işlevsel bir yöntemdir. Limit, matematiksel analizde fonksiyon davranışının temellerini oluşturan ve analitik muhakemenin geliştirilmesinde kilit rol oynayan bir yapıdır. Formal olarak bir fonksiyonun $x \rightarrow a$ iken limiti L ise, değişken x 'in a 'ya yaklaşması sırasında $f(x)$ değerlerinin de L 'ye istenilen hassasiyette yaklaşması limit kavramının özünü oluşturan kesin bir tanımdır. Bu tanım hem iç noktalar için hem de sınır-uç noktalar için tek taraflı limitler aracılığıyla genişletilebilir. Çünkü süreklilik, türev ve integral gibi kalkülüsün temellerini oluşturan bu analitik matematiksel kavramların karşılıklı ilişkileri limitin bu kesin ve genişletilebilir doğası üzerine kurulmuştur. Bu kuramsal çerçeve limitin hem teknik bir işlem hem de kavramsal bir anlayış gerektirdiğini göstermektedir. Nitekim bu durum

¹ Dr. Öğr. Üyesi, Mustafa Kemal Üniversitesi, drmurat05@gmail.com, ORCID iD: 0000-0002-4612-7117

doğrulama gibi daha kapsamlı analizlerin işe koşulmasında fayda görülmektedir. Galperin (1999) türev öğretimi yaparken doğrudan formüllerle başlamak yerine önce integral ve kümeler üzerinden düşünmeyi öğretmenin öğrencilere daha sağlam bir altyapı kazandıracağını rapor etmiştir. Yani türevin arkasındaki fikirleri anlamak formüllerden önce gelmeli anlayışı söz konusudur.

Bu çalışmada ele alınan bölüm uç noktalarda limit, süreklilik ve türev kavramlarının temel koşullarını sistematik biçimde ortaya koymaktadır. Elde edilen en önemli sonuç limitin yalnızca noktanın tanım kümesinin yığılma noktası olması koşuluna bağlı iken türevin hem yığılma noktası hem de tanım kümesi elemanı olmayı gerektirdiğidir. Bu ayrım yarı açık aralıkların uç noktalarında yalnızca tek taraflı limit ve türevlerin anlamlı olmasını zorunlu kılar.

Verilen örnekler uç noktalarda limitin mevcut olmasına rağmen türevin olmayabileceğini ya da tersine türev hesaplanabildiğini göstermektedir. Bu durum fonksiyonların davranışını sınır noktalarında anlamak için yalnızca türevlere bakmanın yeterli olmadığını; ikinci türev testleri, uç nokta kontrolleri ve gerektiğinde türev-dışı yöntemlerle analiz yapılması gerektiğini ortaya koymaktadır.

Çalışma ayrıca öğretimsel açıdan önemli çıkarımlar sunmaktadır. Uç noktaların genellikle derslerde ihmal edilmesi, öğrencilerin limit-süreklilik-türev ilişkisini bütüncül biçimde kavrayamamasına yol açmaktadır. Tek taraflı yaklaşımların sistematik biçimde işlenmesi hem kavramsal anlama hem de optimizasyon gibi uygulamalarda doğru karar verme süreçleri için kritik bir rol taşımaktadır. Sonuç olarak uç noktada türev hem matematiksel analizde hem de öğretimsel uygulamalarda temel ve vazgeçilmez bir kavramdır.

KAYNAKLAR

- Abian, A., & Wilson, J. A. (1998). Derivatives at boundary points. *Kyungpook Mathematical Journal*, 38(2), 359-361. <https://knj.knu.ac.kr/journal/view.html?page=359&volume=38&number=2>
- Adhikari, K. P. (2020). Difficulties and misconceptions of students in learning limit of the function. *Interdisciplinary Research in Education*, 5(1-2), 15-26. <https://doi.org/10.3126/ire.v5i1&2.34731>
- Amatangelo, M. L. (2013). *Student understanding of limit and continuity at a point: A look into four potentially problematic conceptions*. Master of Arts. Brigham Young University, Utah, USA. <https://scholarsarchive.byu.edu/etd/3639>
- Apostol, T. M. (1974). *Mathematical analysis* (2nd Edition). Boston: Addison-Wesley Publishing Company Inc. https://ufsj.edu.br/portal-repositorio/File/demat/PASTA-PROF/jorge/T_F_I_e_T_F_I_Apostol.pdf
- Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399-431. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(97\)90015-8](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90015-8)
- Bakırcı, Ç. M. (2014). *Türev ve integrali gerçekten anlamak: Türev nedir? İntegral nedir?*. Retrieved from the <https://evrimagaci.org/s/2901>
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to real analysis* (4th Edition). New Jersey: John Wiley & Sons Inc. <https://mashadi.staff.unri.ac.id/files/2018/10/BUKU-REAL-ANALYSIS.pdf>

- Better Explained [BE]. (2019). *Calculus: Building intuition for the derivative*. Retrieved from the <https://betterexplained.com/articles/calculus-building-intuition-for-the-derivative/>
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning to understand rate of change. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378. <https://doi.org/10.2307/4149958>
- Castillo-Garsow, C., Johnson, E., & Moore, K. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics* 33(3), 31-37. New Brunswick: FLM Publishing. <https://flm-journal.org/Articles/11A85FC0E320DF94C00F28F2595EAF.pdf>
- Dönmez, D. (2016). *Matematik kafası-ile ilgili sorular: olan f fonksiyonunun a ve b noktalarında limiti var mıdır?_?*. Retrieved from the <https://matkafasi.com/80081/mathbb-olan-f-fonksiyonunun-noktalarinda-limiti-midir?show=80081#q80081>
- Fabian, M. (1981). Differentiability via one sided directional derivatives. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 82(3), 495-500. <https://doi.org/10.2307/2043969>
- Ferres-López, E., Roanes-Lozano, E., Martínez-Zarzuelo, A., & Sánchez, F. (2023). One-sided differentiability: A challenge for computer algebra systems. *Electronic Research Archive*, 31(3), 1737-1768. <https://doi.org/10.3934/era.2023090>
- Feudel, F., & Biehler, R. (2021). Students' understanding of the derivative concept in the context of mathematics for economics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 42, 273-305. <https://doi.org/10.1007/s13138-020-00174-z>
- Fındık, S. (2019). *Türev konusunun matematiksel sit kavramı çerçevesinde ekolojik analizi ve kavramsal ilişkilerinin didaktik yapılandırılması*. Yayınlanmamış Doktora Tezi. (Tez No: 553930). Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, Türkiye. <https://tez.yok.gov.tr>
- Friedlen, D. M., & Nashed, M. Z. (1968). A note on one-sided directional derivatives. *Mathematics Magazine*, 41(3), 147-150. <https://doi.org/10.1080/0025570X.1968.11975863>
- Fuentealba, C. (2018). The understanding of the derivative concept in higher education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(2), 1-15. <https://doi.org/10.29333/ejmste/100640>
- Galperin, E. A. (1999). Some old traditions in mathematics and in mathematical education. *Computers & Mathematics with Applications*, 37(4-5), 9-17. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(99\)00055-3](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(99)00055-3)
- Ghorpade, S. R., & Limaye, B. V. (2006). *A course in calculus and real analysis* (2nd Edition). Cham, Switzerland: Springer. <https://www.math.iitb.ac.in/~srg/acicara2/ACICARA2-PrefaceAnd-ToC.pdf>
- Hunter, J. K. (2016). *An introduction to real analysis*. California: University of California Davis Math. https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/intro_analysis_pdf/intro_analysis.pdf
- İstanbul Temel Bilimler Akademisi [İSTEMBİL]. (2015a). *Mathematics-chapter 1: Limit and continuity*. Retrieved from the <https://istembil.com>
- İstanbul Temel Bilimler Akademisi [İSTEMBİL]. (2015b). *Mathematics-chapter 2: Derivatives-differentiation*. Retrieved from the <https://istembil.com>
- Jameson, G., Machaba, F. M., & Matabane, M. E. (2023). An exploration of grade 12 learners' misconceptions on solving calculus problem: A case of limits. *Research in Social Sciences and Technology*, 8(4), 94-124. <https://doi.org/10.46303/ressat.2023.34>
- Kertil, M. (2014). Pre-service elementary mathematics teachers' understanding of derivative through a model development unit. Unpublished Doctoral Dissertation (Thesis Number 355255). Middle East of Technical University Institute of Science, Ankara, Türkiye. <https://tez.yok.gov.tr>
- Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. *Mathematics Magazine*, 64(5), 291-314. <https://doi.org/10.2307/2690647>
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2023). *Calculus* (12th Edition). Boston: Cengage. <https://www.cengage.com/c/calculus-of-a-single-variable-12e-larson-edwards/9780357749142/>
- Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal: A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259-288. <https://www.jstor.org/stable/3483028>

- Math Is Fun [MIF]. (2017). *Introduction to integration: Rules of integration*. Retrieved from the <https://www.mathsisfun.com/calculus/integration-introduction.html>
- Munkres, J. R. (2000). *Topology* (2nd Edition). New Jersey: Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs. <https://math.mit.edu/~hrm/palestine/munkres-topology.pdf>
- Nave, R. (2019). *Derivatives and integrals: HyperPhysics*. Retrieved from the <https://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/calculus/calint.html>
- Oehrtman, M. (2009). Collapsing dimensions, physical limitation, and other student metaphors for limit concepts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(4), 396-426. <http://dx.doi.org/10.5951/jresmetheduc.40.4.0396>
- Open University [OU]. (2018). *Introduction to differentiation: Functions whose domains include endpoints*. Retrieved from the <https://www.open.edu/openlearn/science-maths-technology/introduction-differentiation/content-section-3.4.3>
- OpenStax of Rice University [ORU]. (2020). *Calculus: Volume-I*. In E. J. Herman & G. Strang (Eds.), Houston: OpenStax. Retrieved from the https://assets.openstax.org/oscms-prodcms/media/documents/Calculus_Volume_1_-_WEB_68M1Z5W.pdf
- Özkoç, M. (2016a). *Matematik kafası-ile ilgili sorular: olan f fonksiyonunun a ve b noktalarında limiti var mıdır?*. Retrieved from the <https://matkafasi.com/80081/mathbb-olan-f-fonksiyonunun-noktalarinda-limiti-midir?show=80081#q80081>
- Özkoç, M. (2016b). *Matematik kafası-ile ilgili sorular: olan fonksiyonunun ve noktalarında türevi var mıdır?*. Retrieved from <https://matkafasi.com/80092/mathbb-fonksiyonunun-noktalarinda-midir-ilgili-bakiniz?show=80092#q80092>
- Özkoç, M. (2021). *Matematik kafası-ile ilgili sorular: Uç noktalardaki limit, süreklilik ve türev durumu*. Retrieved from <https://matkafasi.com/135543/uc-noktalardaki-limit-sureklilik-ve-turev-durumu?show=135543#q135543>
- Park, J. E. (2015). Erratum to: Is the derivative a function? If so, how do we teach it?. *Educational Studies in Mathematics*. 89, 233-250. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9601-7>
- Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis* (3rd Edition). New York: McGraw-Hill. https://david92jackson.neocities.org/images/Principles_of_Mathematical_Analysis-Rudin.pdf
- Şahin, M. (2013). *Uç noktalarda türev var mı?*. Retrieved from the <https://groups.google.com/g/tmoz/c/BFE-zwfj84>
- Sierpinski, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). USA: Mathematical Association of America Notes & Reports. https://www.academia.edu/5091752/On_understanding_the_notion_of_function
- Slavičková, M., & Vargová, M. (2023). Differences in the comprehension of the limit concept between prospective mathematics teachers and managerial mathematicians during online teaching. In Fulantelli, G., Burgos, D., Casalino, G., Cimitile, M., Lo Bosco, G., & Taibi, D. (Eds.), *Higher education learning methodologies and technologies online* (pp. 168-183). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29800-4_13
- Spivak, M. (2008). *Calculus* (3rd Edition). Cambridge Univ. Press. https://assets.cambridge.org/9780521867443/frontmatter/9780521867443_frontmatter.pdf
- Stewart, J. (2016). *Calculus: Early transcendentals* (8th Edition). Cengage Learning. <https://cengage.com>
- Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495-511). London: Macmillan. <https://pdfcentro.com/library/a-transition-to-advanced-mathematics-4974988>
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Heil, C. (2014). *Thomas' calculus early transcendentals* (13th Ed.). Boston: Pearson. https://rodrigopacios.github.io/mrpacios/download/Thomas_Calculus

pdf

- Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. *Research in Collegiate Mathematics Education I*, 21-44. <https://pat-thompson.net/PDFversions/1994StuFunctions.pdf>
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. <https://pat-thompson.net/PDFversions/2016ThompsonCarlsonCovariation.pdf>
- Uzay, U. (2013). *Uç noktalarda türev var mı?*. Retrieved from the <https://groups.google.com/g/tmoz/c/BFE-zwfji84>
- Weldeana, H. N., Sbhatu, D. B., & Berhe, G. T. (2023). Freshman STEM students' misconceptions in a basic limit. *Heliyon*, 9(12), 1-9. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e22359>
- Yu, F. (2019). *A student's meaning for the derivative at a point*. In A. Weinberg, D. Moore-Russo, H. Soto, and M. Wawro (Eds), 22nd Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (pp. 1203–1204). Oklahoma City. https://www.researchgate.net/publication/336208885_A_Student's_Meanings_for_the_Derivative_at_a_Point_Poster
- Yu, F. (2020). *Students' meanings for the derivative at a point*. In S. S. Karunakaran, Z. Reed, and A. Higgins (Eds), 23rd Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (pp. 672-680). Boston, MA. https://www.researchgate.net/publication/345344391_Students'_Meanings_for_the_Derivative_at_a_Point
- Zandieh, M. J. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education: IV. Issues in mathematics education* (pp. 103-127). Providence, RI: American Mathematical Society. https://www.researchgate.net/publication/290852352_A_theoretical_framework_for_analyzing_student_understanding_of_the_concept_of_derivative
- Zandieh, M. J., & Knapp, J. (2006). Exploring the role of metonymy in mathematical understanding and reasoning: the concept of derivative as an example. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 1-17. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.11.002>
- Zorich, V. A. (2004). *Mathematical analysis-I*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. <https://zr9558.com/wp-content/uploads/2013/11/mathematical-analysis-zorich1.pdf>